Sujets de stage de Bac 3

Service de Physique de l'Univers, Champs et Gravitation

Année académique 2021-2022

1) Représentations exotiques du groupe des rotations : les « anyons » en deux dimensions spatiales

L'étude des représentations irréductibles du groupe SO(2) montre l'existence de représentation multi-valuées de SO(2). Nous verrons pendant la semaine de stage que ces représentations sont liées à des quasi-particules observées dans des systèmes de charges électriques confinées à une plaque métallique homogène soumise à un champs magnétique normal à la plaque. Ces particules possèdent des propriétés remarquables et sont appelées « anyons ». Elles jouent un rôle central dans la description de l'effet Hall quantique. Comme introduction à la physique des anyons, nous étudierons un modèle simple de particule chargée électriquement portant une unité de flux magnétique dans un plan.

Référence : S. Forte, *Quantum mechanics and field theory with fractional spin and statistic*, Rev. Mod. Phys. 64 (1992) 193.

2) Les équations de Abraham-Lorentz-Pauli en électrodynamique classique

En théorie classique de l'électrodynamique, le potentiel électromagnétique diverge au point où se trouve une particule ponctuelle chargée. Pour la même raison, dans l'étude du rayonnement électromagnétique émis par une charge accélérée et du potentiel de Liénard-Wiechert associé, on trouve que le champ électromagnétique généré par une charge en mouvement diverge aux petites distances de la charge. Il s'agit d'une divergence ultra-violette (UV) due à la nature ponctuelle de la charge.
L'une des tentatives pour essayer de régulariser cette divergence UV est l'équation d'Abraham-Lorentz-Pauli. Cependant, cette approche présente encore quelques faiblesses, comme le problème de la pré-accélération. Il existe quelques tentatives récentes pour remédier à ce problème, toujours dans le contexte de l'équation d'Abraham-Lorentz-Pauli. En fait, en 1945, J.A. Wheeler et R. Feynman ont publié un article intitulé "Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation" où ils formulent une théorie essayant de résoudre le problème, mettant ensemble deux idées : l'équation d'Abraham-Lorentz-Pauli et une théorie d'action à distance (non locale) et introduisant un nouvel objet, l'absorbeur.
Nous allons parcourir toutes ces idées avec une attention particulière portée sur l'équation d'Abraham-Lorentz-Pauli.

Références :

- Fritz Rohrlich, *The dynamics of a charged particle*, Physical Review E 77 (2008) ;
- Janos Polonyi, *The Abraham-Lorentz force and electrodynamics at the classical,* International Journal of Modern Physics A 34 (15) (2019) ;
- Gabriele Casagrande, *L'elettrodinamica di Wheeler e Feynman,* Tesi di Laurea Università degli studi di Padova (2018/2019).

3) Anomalies en mécanique quantique

Le recours à la notion de symétrie dans notre compréhension des systèmes physiques est bien connu. Une manifestation importante de la symétrie apparaît via le théorème de Noether qui garantit la correspondance entre les symétries infinitésimales d'un système physique et les quantités conservées (les intégrales premières) admises par ce système. Par exemple, l'invariance d'un système sous translations de l'origine du système de coordonnées utilisé pour sa description implique la conservation de la quantité de mouvement du système physique.
Les symétries se manifestent quand bien même elles ne sont réalisées qu'approximativement dans la nature. Avoir une symétrie partielle est souvent appelé brisure de symétrie et peut apparaître sous différentes formes : brisure de symétrie explicite ; brisure de symétrie spontanée ; brisure de symétrie au niveau quantique. Nous passons en revue les trois, mais en particulier nous nous concentrerons sur le dernier mécanisme de brisure de symétrie qui n'est généralement pas abordé au niveau du premier cycle car il apparaît principalement en théorie quantique des champs. Cependant, il peut également apparaître dans des systèmes quantiques non-relativistes que l'on peut étudier dans le cadre du formalisme de la mécanique quantique enseigné en BAB3.

Références :

- Sidney A. Coon and Barry R., *Holstein Anomalies in Quantum Mechanics: the 1/r^2 Potential,* American Journal of Physics **70**, 513 (2002) ;
- Djamil Bouaziz and Michel Bawin, *Regularization of the singular inverse square potential in quantum mechanics with a minimal length,* Physical Review A. 76, 032112 (2007).

4) Le problème de diffusion inverse, équation de KdV et intégrabilité

Dans les années 1800, Liouville a étudié la notion d'intégrabilité des systèmes hamiltoniens, fournissant un cadre général pour résoudre des systèmes dynamiques particuliers, mais ce n'est qu'au vingtième siècle qu'une méthode systématique a été développée. La méthode la plus connue porte le nom de « méthode de diffusion inverse classique ». Elle a été inventée par Gardner, Greene, Kruskal et Miura en 1967. Ces auteurs l'ont appliquée avec succès pour résoudre l'équation de Korteweg-deVries (KdV) de la mécanique des fluides. Nous reverrons le concept de système hamiltonien intégrable vu au cours de Mécanique analytique et introduirons ensuite les variables d'action-angle, ainsi que quelques méthodes algébriques très intéressantes pour l'étude des systèmes intégrables ou proche de l'intégrabilité. Enfin, nous appliquerons toutes ces techniques pour étudier et résoudre l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) et/ou l'équation Sine-Gordon, à partir de solutions de type « soliton ».

Références :

- Alessandro Torrielli, *Lectures on Classical Integrability*, J.Phys. A 49 (2016) no.32 ;
- Clifford S. Gardner, John M. Greene, Martin D. Kruskal, and Robert M. Miura, *Method for Solving the Korteweg-deVries Equation,* Phys. Rev. Lett. **19**, 1095 (1967).

5) Action de Nambu-Goto pour la corde bosonique

La théorie des cordes est la tentative la plus connue des physiciens pour construire une théorie quantitique de la gravité. Les particules ponctuelles à zéro dimension sont généralisées aux cordes unidimensionnelles. Dans ce projet, nous passerons en revue l'action des particules ponctuelles, les symétries et les équations du mouvement avant d'effectuer une analyse similaire de l'action de Nambu-Goto. Nous viserons à comprendre les symétries du groupe de Poincaré et les transformations sous reparamétrisation de l'action de Nambu-Goto. Nous dériverons ensuite les équations du mouvement.

Références :

- P. West, *Introduction to Strings and Branes*, Cambridge University Press (2012) ;
- D. Tong, *String Theory*, Lecture notes for the University of Cambridge (2012).

6) Inégalités de Bell et variables cachées

La mécanique quantique repose sur de solides principes mathématiques. Ceci étant dit, notamment en raison de sa nature probabiliste et des phénomènes surprenants comme l'intrication quantique, certaines personnes, en particulier dans le passé, étaient un peu réticentes à accepter le formalisme de la mécanique quantique. L'un des exemples les plus célèbres est l'expérience de pensée d'Einstein-Poldosky-Rosen (EPR), apparue dans un article écrit en 1935. Certains cherchèrent à développer une "théorie des variables cachées", qui aurait donné le même résultat que la mécanique quantique, mais sans aucune interprétation probabiliste. Le jalon de cette discussion a été posé par J. S. Bell dans un article de 1964 où il montra que, indépendamment de la nature de ces variables cachées, ces théories hypothétiques ne peuvent pas reproduire toutes les prédictions de la mécanique quantique. Ce résultat est exprimé par un ensemble d'inégalités connues sous le nom d'inégalités de Bell qui peuvent être violées (ou non) par une théorie quantique. Nous passerons en revue l'intrication quantique, la mesure quantique et les inégalités de Bell.

Références :

- Kenichi Konishi and Giampiero Paffuti, *Quantum Mechanics: A New Introduction,* Oxford University Press (2009) ;
- John Preskill, *Quantum Information and Computation Chapter 4,* Lecture Notes for Ph219/CS219 (2001).

7) Séries asymptotiques

La question de l'extraction d'informations à partir d'une série asymptotique se pose assez naturellement en physique : il est souvent impossible, lorsqu'on s'attaque à un problème (difficile) donné, d'obtenir une réponse exacte. Afin de remédier à cela, il est utile d'introduire un petit paramètre ε pour obtenir des approximations successives de solution, ordre par ordre en puissances du paramètre ε. L'introduction du paramètre est réalisée à partir d'une solution connue et exacte du problème avec $\varepsilon = 0$. On espère par après pouvoir donner un sens à une telle suite pour $\varepsilon \to 1$. Nous étudierons des stratégies pour accélérer le taux de convergence des séries convergentes et plus particulièrement nous nous intéresserons aux séries divergentes et comment en extraire des informations pertinentes (Sommation d'Euler, Sommation de Borel et Théorie de Padè basée sur les fractions continues). Nous allons appliquer certaines de ces méthodes à des équations aux dérivées partielles (EDP) liées à des systèmes physiques.

Référence : Carl M. Bender and Carlo Heissenberg, *Convergent and Divergent Series in Physics,* Lecture notes of the 22nd "Saalburg" Summer School (2016).

8) Correspondance de McKay

La correspondance de McKay, découverte en 1980 par le mathématicien Australien John McKay, est une relation étonnante entre les sous-groupes finis $\Gamma \subset SL(2,C)$ et les algèbres de Lie semi-simples g que vous étudierez dans la deuxième partie du cours de Théorie des Groupes S-PHYS-201.
L'observation consiste, d'une part, à dessiner des graphes, dit de McKay, qui encodent toutes les représentations irréductibles des groupes Γ et certaines relations entre elles. D'autre part, vous verrez plus tard que les algèbres de Lie semi-simples peuvent être décrites par des diagrammes nommés "diagrammes de Dynkin". La correspondance entre les groupes finis Γ et les algèbres de Lie g se découvre en constatant que ces diagrammes sont isomorphes.
Le but de ce projet est de classifier les sous-groupes discrets de SL(2,C), identifier leurs représentations irréductibles et, enfin, dessiner les graphes de McKay sur la base de ces informations.

Les références et connaissances nécessaires seront données en cours de semaine.

9) Mécanique des Fluides Parfaits : Approches Classique et Relativiste

De nombreux domaines de la physique utilisent la statique et la dynamique des fluides, comme par exemple en astrophysique (pour modéliser les instabilités gravitationnelles), en holographie (dans la correspondance fluide/gravité), etc. Nous verrons au cours de ce stage les bases de cette mécanique dans son cas le plus simple, à savoir un fluide parfait, en dérivant notamment les équations d'écoulement et les flux d'énergie et d'impulsion associés. Nous commencerons par l'étudier du point de vue classique et verrons ensuite comment généraliser cela dans le cadre de la théorie de la relativité spéciale. Si le temps nous le permet, nous introduirons des aspects dissipatifs et visqueux dans le milieu de propagation du fluide, ce qui rend subtile l'interprétation de la vitesse hydrodynamique relativiste. Ce stage permettra à l'étudiant de dériver et de comprendre les bases de cette mécanique en y appliquant les notions relativistes spéciales, tout en s'initiant à la méthode de la recherche théorique.

Références :

- L. Landau et E.Lifchitz, *Physique théorique - Mécanique des fluides*, Editions MIR Moscou, Tome 3 (1994) ;
- L. Rezzolla and O. Zanotti, *Relativistic Hydrodynamics*, OUP Oxford (2013).

10) La solution exacte d'Onsager du modèle d'Ising bidimensionnel

Le modèle d'Ising fournit une description simplifiée d'un matériau ferromagnétique. Dans le cours de Physique Statistique, vous avez appris à calculer avec diverses approximations ses fonctions thermodynamiques et à le résoudre exactement dans une dimension spatiale. Malheureusement, le modèle d'Ising en une dimension n'admet pas d'aimantation spontanée. Le cas de deux dimensions spatiales est particulièrement intéressant car il est encore possible de le résoudre analytiquement (c'est-à-dire de calculer exactement ses fonctions thermodynamiques et sa température critique), tout en ayant une aimantation spontanée.
Le but de cette étape sera de comprendre la solution exacte d'Onsager du modèle d'Ising à deux dimensions en confrontant deux approches complémentaires : l'une basée sur la méthode de la matrice de transfert et l'autre basée sur la dualité Kramers-Wannier que vous avez étudiée dans une des séances d'exercices du cours de Physique Statistique.

Références :

- K. Huang, *Statistical Mechanics*, John Wiley & Sons (1987) ;
- C. Heissenberg and A. Sagnotti, *Classical and Quantum Statistical Physics: Fundamentals and Advanced Topics*, Cambridge Univ. Press (2022).

11) Mouvement dans un potentiel central en relativité générale

Dans le cours de MAB1 de Relativité Générale, vous apprendrez à calculer les corrections aux lois de Kepler induites par la théorie de la gravitation d'Einstein. Même sans connaître les détails de leur dérivation, on peut supposer que les corrections prennent une certaine forme et dériver leurs effets sur le mouvement dans un potentiel central.
Les objectives de ce stage seront deux : 1) dériver la forme exacte des orbites fermées en relativité générale en utilisant la méthode Hamilton-Jacobi que vous avez étudiée dans le cours de mécanique analytique et 2) comparer les orbites possibles en gravitation de Newton et d'Einstein en étudiant la forme des potentiels effectifs décrivant le mouvement.

Référence : C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, Gravitation, W. H. Freeman and Company (1973).