Sujets de stage de Bac 3

Service de Physique de l'Univers, Champs et Gravitation

Année académique 2022-2023

1) Les équations de Abraham-Lorentz-Pauli en électrodynamique classique

En théorie classique de l'électrodynamique, le potentiel électromagnétique diverge au point où se trouve une particule ponctuelle chargée. Pour la même raison, dans l'étude du rayonnement électromagnétique émis par une charge accélérée et du potentiel de Liénard-Wiechert associé, on trouve que le champ électromagnétique généré par une charge en mouvement diverge aux petites distances de la charge. Il s'agit d'une divergence ultra-violette (UV) due à la nature ponctuelle de la charge.
L'une des tentatives pour essayer de régulariser cette divergence UV est l'équation d'Abraham-Lorentz-Pauli. Cependant, cette approche présente encore quelques faiblesses, comme le problème de la pré-accélération. Il existe quelques tentatives récentes pour remédier à ce problème, toujours dans le contexte de l'équation d'Abraham-Lorentz-Pauli.
En remontant plus dans le passé, en 1945, J.A. Wheeler et R. Feynman avaient publié un article intitulé "Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation" où ils formulent une théorie en essayant de résoudre le problème, mettant ensemble deux idées : l'équation d'Abraham-Lorentz-Pauli et une théorie d'action à distance (non locale) et introduisant un nouvel objet, l'absorbeur.
Nous allons parcourir quelques-unes de ces idées avec une attention particulière portée sur l'équation d'Abraham-Lorentz-Pauli.

Références :

- Fritz Rohrlich, *The dynamics of a charged particle*, Physical Review E 77 (2008) ;
- Janos Polonyi, *The Abraham-Lorentz force and electrodynamics at the classical,* International Journal of Modern Physics A 34 (15) (2019) ;
- Gabriele Casagrande, *L'elettrodinamica di Wheeler e Feynman,* Tesi di Laurea Università degli studi di Padova (2018/2019).

2) Theorema egregium

Le « Theorema egregium », énoncé par Carl Friedrich Gauss, atteste que la courbure de Gauss d'une surface est invariante sous isométries locales. Autrement dit, cette courbure ne dépend pas de la manière dont la surface est plongée dans l'espace. Comme conséquence, par exemple, il est impossible de représenter isométriquement la surface terrestre sur un planisphère.
L'objectif de ce stage est d'abord de se familiariser avec les notions de surface, d'isométries, de métrique et de courbure de Gauss, et ensuite de prouver le théorème.

Référence : Andrew Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer (2012).

3) Introduction à la théorie des catégories et au lemme de Yoneda

En physique moderne, travailler avec différents types de structures mathématiques est devenu incontournable, il suffit de penser à l'importance de la théorie des groupes. Cependant, il existe d'autres structures importantes et la théorie des catégories nous donne un moyen de les étudier toutes ensemble. La théorie des catégories est l'étude mathématique des algèbres abstraites de fonctions, ou en termes heuristiques, "l'étude des objets et des flèches". Il a été introduit dans la tradition du programme d'élargissement de Felix Klein, comme moyen d'étudier et de caractériser différentes structures en termes de "transformations admissibles". La théorie a été inventée par Eilenberg et Mac Lane en 1945.

Le but de la théorie des catégories est double :
D'une part elle peut être interprétée comme une base pour les mathématiques, remplaçant ainsi la notion de théorie des ensembles, d'autre part comme un outil pour étudier les structures mathématiques de la manière la plus générale. Ici, nous nous sommes concentrés sur la deuxième idée. Nous définirons des catégories et introduirons des notions de base telles que : épimorphisme, monomorphisme, objets initiaux et terminaux, produit, co-produits et des notions moins basiques telles que : limites et colimites.

Le but du stage sera de démontrer et de comprendre la signification du lemme de Yoneda (une généralisation du théorème de Cayley en théorie des groupes), probablement le résultat le plus important en théorie des catégories. Au cours des projets, nous essaierons également de résoudre des exercices et de donner des exemples concrets des différents concepts dans des catégories bien connues comme les groupes, les monoïdes, les espaces topologiques, etc.

Référence : Steve Awodey, "Category Theory", Oxford University Press.

4) Action de Nambu-Goto pour la corde bosonique

La théorie des cordes est la tentative la plus connue des physiciens pour construire une théorie quantique de la gravité. Les particules à zéro dimension sont généralisées aux cordes unidimensionnelles. Dans ce projet, nous passerons en revue l'action des particules relativistes, leurs symétries et leurs équations du mouvement, avant d'effectuer une analyse similaire de l'action de Nambu-Goto. Nous viserons à comprendre les symétries du groupe de Poincaré et les transformations sous reparamétrisations de l'action de Nambu-Goto. Nous dériverons ensuite les équations du mouvement.

Références :

- P. West, *Introduction to Strings and Branes*, Cambridge University Press (2012);
- D. Tong, *String Theory*, Lecture notes for the University of Cambridge (2012).

5) Calcul de signal gravitationnel générée par un système lié à deux corps dans un cadre newtonien

Une des prédictions les plus remarquables de la Relativité Générale d'Einstein est celle de l'existence des ondes gravitationnelles. Ces dernières correspondent à des oscillations ayant lieu au sein de la métrique d'espace-temps et sont notamment générées par des systèmes à deux astres réalisant des orbites fermées.
Depuis la construction des laboratoires LIGO, VIRGO et KAGRA suivies des premières premières détections expérimentales de 2015, on connaît de nos jours un regain d'intérêt quant à l'étude des ondes gravitationnelles au sein de la communauté scientifique. Les challenges actuels sont principalement liés à la modélisation des signaux émis par un système à deux corps ainsi qu'à la compréhension du mouvement orbital de ces derniers.
Le but de ce projet est de comprendre une méthode permettant de résoudre de façon perturbative l'équation d'onde en relativité. Cette dernière se lit

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right)h_{\mu\nu} = -\frac{16\,\pi G}{c^4}T_{\mu\nu},$$

où $h_{\mu\nu}$est la perturbation métrique (on écrit la métrique d'espace-temps comme étant $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$) et $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion du système à deux corps massifs liés.
L'étudiant(e) sera ensuite mené(e) à étudier un système composé de deux masses ponctuelles massives dont le centre de masse réalise une orbite circulaire, le mouvement étant décrit par la loi de gravitation de Kepler-Newton. On ne fera donc appel à aucune correction due à la théorie de la Relativité Générale.
Une fois les données nécessaires trouvées, ces dernières seront incorporées dans la solution de l'équation d'onde et permettront de dresser un premier portrait de signal gravitationnel.
La solution obtenue pourra déjà être comparée avec le premier signal historique GW150914, et permet également de donner une approximation des ordres de grandeurs impliquant les ondes gravitationnelles.

Références :

- Michele Maggiore, *Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments* (Oxford, 2007; online edn, Oxford Academic, 1 Jan. 2008)
- Abbott, B. P. et al., *LIGO Scientific, Virgo, Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett., 116 (2016) 6.

6) La particule supersymétrique

La supersymétrie est une symétrie spatio-temporelle entre bosons et fermions. Elle apparaît dans de nombreux modèles, le plus célèbre étant la théorie des supercordes. Ce projet étudiera la particule supersymétrique. Nous allons analyser quelques actions supersymétriques. En particulier, nous montrerons leur invariance par supersymétrie et nous en dériverons les équations de mouvement associées.

Référence :

- P. West, *Introduction to Strings and Branes*, Cambridge University Press (2012).

7) Invariance de jauge des théories de champs libres

Dans ce projet, nous étudierons l'invariance de jauge des théories classiques de champs libres. Pour le champ sans masse de spin-1 (le photon), nous montrerons l'invariance de jauge de l'action de Maxwell et, en effet, nous montrerons qu'il s'agit de l'action invariante de jauge la plus générale pour cette symétrie. Pour le champ sans masse de spin-2 (le graviton), nous trouverons de même l'action de Fierz-Pauli pour la gravité linéarisée. Si le temps le permet, nous examinerons brièvement l'invariance de jauge des actions pour les champs dont le spin est supérieur à deux.

Référence :

D. Tong, Lectures on Electromagnetism, Cambridge University (2015).

8) Abelian and Non-abelian Aharonov-Bohm effect

In this short project we will see how the concept of gauge invariance in quantum mechanics leads to an important physically measurable effect known as Aharonov-Bohm effect. We will try to understand both abelian and non-abelian version of the effect. Starting from the notion of invariance very briefly we will study the “gauge” invariance of Maxwell equation and ask the question whether such a gauge invariance survive in quantum mechanics or not. This exercise will lead to various notions and concept used in modern theoretical physics. The aim of the project is to introduce the concept of gauge symmetries in a more physical way, and we will end the project with some appreciation of the geometric aspects, underlying the idea of modern gauge theories.

Références **:**

a) Non-Abelian Aharonov-Bohm effect with the time-dependent gauge fields: **https://doi.org/10.1016/j.physletb.2016.02.004**

b) Book: Gauge theories in particle physics: **https://doi.org/10.1201/9781315275253**

9) An introduction to deformation quantisation

A natural question was asked during the birth of quantum mechanics: how can we pass from the classical description of a physical system to a quantum description? One early answer was provided by the canonical quantisation procedure introduced in Paul Dirac's 1926 doctoral thesis on the quantisation of point-like particles. However, this method is hard to generalise to more complicated systems. In fact, it was shown that we cannot quantise classical observables that are of cubic order or higher in phase space coordinates without imposing an order prescription. Relatedly, we see the emergence of new quantisation procedures: geometric quantisation and deformation quantisation, the latter of which was introduced by Flato-Lichnerowicz-Sternheimer. The main idea of this procedure is to think about quantisation as a deformation of the algebra of classical observables rather than as a radical change of observables themselves. It was proven by Kontsevich that any classical phase space can be quantised in this way. The main aim of this project is to provide a brief introduction to deformation quantisation and to use it to reconstruct the canonical commutation relations of quantum mechanics. If time permits, we will also apply this procedure to the harmonic oscillator.

Références :

- P. A. M. Dirac, *Quantum mechanics* (1926).

- M. Flato, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Crochet de Moyal-Weyl et quantification*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A283 (1976).

10) Introduction aux phénomènes dissipatifs pour les fluides

L'objectif de ce stage est de comprendre les bases des phénomènes dissipatifs en mécanique des fluides. Nous commencerons par la définition d'un fluide parfait, puis nous étudierons comment les équations du mouvement doivent être modifiées pour prendre en compte la viscosité et la conduction thermique.

Références :

- L. Landau et E.Lifchitz, *Physique théorique - Mécanique des fluides*, Editions MIR Moscou, Tome 3 (1994)

11) La solution exacte d'Onsager du modèle d'Ising bidimensionnel

Le modèle d'Ising fournit une description simplifiée d'un matériau ferromagnétique. Dans le cours de Physique Statistique, vous avez appris à calculer avec diverses approximations ses fonctions thermodynamiques et à le résoudre exactement dans une dimension spatiale. Malheureusement, le modèle d'Ising en une dimension n'admet pas d'aimantation spontanée. Le cas de deux dimensions spatiales est particulièrement intéressant car il est encore possible de le résoudre analytiquement (c'est-à-dire de calculer exactement ses fonctions thermodynamiques et sa température critique), tout en ayant une aimantation spontanée.
Le but de cette étape sera de comprendre la solution exacte d'Onsager du modèle d'Ising à deux dimensions en confrontant deux approches complémentaires : l'une basée sur la méthode de la matrice de transfert et l'autre basée sur la dualité Kramers-Wannier que vous avez étudiée dans une des séances d'exercices du cours de Physique Statistique.

Références :

- K. Huang, *Statistical Mechanics*, John Wiley & Sons (1987) ;
- C. Heissenberg and A. Sagnotti, *Classical and Quantum Statistical Physics: Fundamentals and Advanced Topics*, Cambridge Univ. Press (2022).

12) Une théorie de jauge pour les eaux peu profondes

L'objectif de ce stage est de montrer, en suivant l'article dans les références, que les équations qui décrivent l'écoulement horizontal d'une fine couche de fluide dont la hauteur varie peuvent être réécrites comme une théorie de jauge en d = 2 + 1 dimensions avec un terme de Chern-Simons. Cette théorie contient deux champs de jauge abéliens qui sont des quadrivecteurs présentant la même symétrie de jauge que le potentiel vectoriel de l'électromagnétisme et qui, dans ce contexte, correspondent à la hauteur conservée et à la vorticité conservée du fluide. Nous montrerons également que dans une certaine approximation linéarisée, les équations des eaux peu profondes se réduisent alors à la théorie relativiste de Maxwell-Chern-Simons.

Références :

- D. Tong, *A Gauge Theory for Shallow Water*, arXiv:2209.10574 [hep-th].
- G. Dunne, *Aspects of Chern-Simons Theory*, arXiv:hep-th/9902115 (only selected portions!)